En el conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se definen las siguientes operaciones:

Suma $+$: $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.

Producto $\cdot$: $\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$.

Estudiar si la terna $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Si x, y, z son vectores linealmente dependientes de V

i) ¿Se puede asegurar que x depende linealmente de los otros dos?

ii) ¿Se puede asegurar que uno de los tres vectores es combinación lineal de los otros dos?

Razonar las respuestas.

Determinar a *y* b *para que el vector* $(1, 0, a, b)$ *pertenezca al subespacio engendrado por* $(1, 4, -5, 2)$ *y* $(1, 2, 3, -1)$.

Sea $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ *un subconjunto del espacio vectorial* $\mathbb{R}^4$.

i) Demostrar que M *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^4$.

ii) Encontrar en M *tres vectores* u, v, w *linealmente independientes, y demostrar que todo vector de* M *se puede poner como combinación lineal de* u, v, w.

Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. *Hallar*

i) una base que contenga al vector $(1, 2, 1, 1)$.

ii) una base que contenga a los vectores $(1, 1, 0, 2)$ *y* $(1, -1, 2, 0)$.

En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ se considera el sistema $S = \{(1,1,a),(1,a,1),(a,1,1)\}$ referido a la base canónica. Estudiar en función de a la dimensión del subespacio engendrado por S, $L(S)$.

Determinar una base del subespacio V engendrado por

$$\{(1,2,3,1),(2,3,2,3),(0,1,4,-1),(2,-3,1,1),(4,1,7,3)\}.$$

Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ *consideremos los subespacios*

$$V_1 = L\{(1,2,0,1)\}$$
$$V_2 = \{\,(x,y,z,t)\ /\ x-y+z+t=0, y-z=0\,\}$$
$$V_3 \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = \mu \end{cases}$$

¿Pertenece el vector $v = (2,4,0,2)$ *a* V_1, V_2 *ó* V_3*? En caso afirmativo calcular sus coordenadas en unas bases elegidas previamente.*

Determinar una base para la suma y la intersección de los subespacios V_1 *y* V_2 *engendrados por* $\{(1,2,1,0),(-1,1,1,1)\}$ *y* $\{(2,-1,0,1),(1,-1,3,7)\}$ *respectivamente.*

En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1 = \{(x, y, z) \,/\, x + y + z = 0\}$$
$$W_2 = \{(t, 2t, 3t) \,/\, t \in \mathbb{R}\}$$

Demostrar que $\mathbb{R}^3$ es suma directa de W_1 y W_2, es decir, $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

En el espacio vectorial real de las matrices 2×2 *con elementos reales,* $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, *se consideran los subespacios*

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \;\; x + y - 2z = t \right\}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 3a + b & -b \\ a & a + b \end{pmatrix}, \;\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Hallar la dimensión y una base de U, V *y* W.

Calcular bases de los subespacios de $\mathbb{R}^4$ S, T, $S+T$ *y* $S \cap T$, *siendo* $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 - x_2 = 0\}$ *y* $T = <(1,1,2,1),(2,3,-1,1)>$.

Determinar los valores de a y b, si es que existen, para que

$$< (a, 1, -1, 2), (1, b, 0, 3) > = < (1, -1, 1, -2), (-2, 0, 0, -6) > .$$

Sea $P_n(x)$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n. Se pide

i) Demostrar que el polinomio x^n y sus n primeras derivadas forman una base de $P_n(x)$.

ii) Estudiar si los vectores $p_1(x) = 1 + 3x + 5x^2$, $p_2(x) = -1 + 2x^2$ y $p_3(x) = 3 + 3x + x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

iii) Sean $r_1(x) = 1 + x^2$, $r_2(x) = 1 - x^2$ y $V_1 = L\{r_1(x), r_2(x)\}$. Sean $p(x) = 1 + 5x^2$, $r(x) = 1 + x$. ¿Pertenecen $p(x)$ y $r(x)$ a V_1?

iv) Sea $V_2 = L\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$. Calcular $V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$.

